Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4^2 = b_2 \cdot b_6 \Rightarrow 4^2 = 2b_6$	**3p**
	$b_6 = 8$	**2p**
2.	$x_V = 1$, $y_V = m-1$, unde $V(x_V, y_V)$ este vârful parabolei asociate funcției f	**2p**
	$y_V = 3x_V \Leftrightarrow m-1=3$, deci $m=4$	**3p**
3.	$2^{2x} - 2\cdot 2^x - 3 = 0 \Rightarrow (2^x+1)(2^x-3)=0$	**3p**
	Cum $2^x > 0$, obținem $x = \log_2 3$	**2p**
4.	Numerele naturale de trei cifre care au exact două cifre egale sunt de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$, unde a și b sunt cifre distincte	**2p**
	Sunt $9\cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aab}$, $9\cdot 9=81$ de numere de forma $\overline{aba}$ și $9\cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{baa}$ cu a și b cifre distincte, deci numărul cerut este $81\cdot 3 = 243$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ și $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{MB'}$, unde M este mijlocul segmentelor AB, respectiv $A'B'$	**2p**
	$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$	**3p**
6.	$2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$	**2p**
	$BC = 2R\sin A,\ AC = 2R\sin B$ și $AB = 2R\sin C \Rightarrow AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(0,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0+2+0-0-0-1 = 1$	**3p**
b)	$\det(X(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b-a$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	Pentru $a \neq b$, $\det(X(a,b)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
c)	Dacă $a \neq b$, sistemul are soluția unică $(0,2,-1)$ și $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 2^2 - (-1)^2 - 2a\cdot 0 = 3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Dacă $a = b$, sistemul are soluțiile $(\alpha,\ 2+a\alpha,\ -1-a\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$, deci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 =$ $= (2+a\alpha)^2 - (-1-a\alpha)^2 - 2a\alpha = 4 + 4a\alpha + a^2\alpha^2 - 1 - 2a\alpha - a^2\alpha^2 - 2a\alpha = 3$, pentru orice număr real a	**3p**
2.a)	$5 * 10 = (5-1)^{\log_3(10-1)} + 1 = 4^{\log_3 9} + 1 =$	**3p**
	$= 4^2 + 1 = 17$	**2p**

b)	$x*e=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}+1=x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)}=x-1$, pentru orice $x\in M$, de unde obținem $\log_3(e-1)=1$, deci $e=4\in M$	**3p**
	Cum $4*x=3^{\log_3(x-1)}+1=(x-1)+1=x$, pentru orice $x\in M$, obținem că $e=4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*x=(x-1)^{\log_3(x-1)}+1$, $x*x*x=(x-1)^{\log_3^2(x-1)}+1$, pentru orice $x\in M$	**2p**
	Cum $x\in M$, $(x-1)^{\log_3(x-1)}=(x-1)^{\log_3^2(x-1)} \Rightarrow \log_3(x-1)=\log_3^2(x-1)$, deci $\log_3(x-1)=0$ sau $\log_3(x-1)=1$ și, cum $x>2$, obținem $x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2e^{2x}+4x^3}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left(e^{2x}+2x^3\right)}{2\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}=\dfrac{e^{2x}+2x^3}{\sqrt{e^{2x}+x^4+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f, este egală cu $f'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	Cum dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$ are panta egală cu $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, obținem că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $x-\sqrt{3}y=0$	**3p**
c)	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{2x}+2x^3 \Rightarrow g'(x)=2e^{2x}+6x^2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ și g este continuă, există un unic număr real c cu $g(c)=0$	**2p**
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,c)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,c]$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(c,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[c,+\infty)$, deci f are un unic punct de extrem	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2+3-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}>0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este strict crescătoare	**2p**
c)	$\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx=\int_a^b F^2(x)F'(x)dx=\frac{1}{3}F^3(x)\Big\vert_a^b=\frac{1}{3}\left(F^3(b)-F^3(a)\right)$	**3p**
	Cum F este strict crescătoare, obținem că $F(a)<F(b)$, pentru orice numere reale a și b, cu $a<b$, deci $\displaystyle\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\frac{13}{z}=3+2i+\frac{13}{3+2i}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{9-4i^2}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{13}=$	**3p**
	$=3+2i+3-2i=6$	**2p**
2.	$f(g(a))=f(g(-a))\Leftrightarrow 3g(a)-5=3g(-a)-5\Leftrightarrow g(a)=g(-a)$	**3p**
	$a^2+a=a^2-a\Leftrightarrow a=0$	**2p**
3.	$3^{3x+5}=3^2\cdot 3^{x+1}\Leftrightarrow 3^{3x+5}=3^{x+3}$	**3p**
	$3x+5=x+3\Rightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor lui A este egal cu 2^4, deci sunt 16 cazuri posibile	**2p**
	Numărul submulțimilor lui A cu un număr impar de elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=8$, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$M(2,4)$ este mijlocul segmentului AB, deci $m_{CM}=-1$	**2p**
	$d\parallel CM\Rightarrow m_d=-1$, deci ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d(x-x_A)$, adică $y=-x+4$	**3p**
6.	$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B\Rightarrow 12=4+BC^2-2\cdot 2\cdot BC\cdot\frac{1}{2}$	**3p**
	$BC^2-2BC-8=0\Rightarrow BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{vmatrix}=a(1+2x)(1-2x)+4ax^2=$	**3p**
	$=a(1-4x^2)+4ax^2=a$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a^2 & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, $A(x+y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\Rightarrow a^2=a$ și, cum a un număr real nenul, obținem $a=1$	**2p**
c)	$A(-2)\cdot A(2)=A(0)=I_3$, deci $A(-2)$ este inversa matricei $A(2)$	**2p**
	$X=A(-2)\cdot A(3)\Rightarrow X=A(1)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$0*2021=\log_2\left(2^0+2^{2021}-1\right)=\log_2\left(1+2^{2021}-1\right)=$	**3p**
	$=\log_2 2^{2021}=2021$	**2p**

b)	$x*e=x\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+2^e-1\right)=x\Leftrightarrow 2^x+2^e-1=2^x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, de unde obținem $2^e=1$, deci $e=0\in M$	**3p**
	Cum $0*x=\log_2\left(1+2^x-1\right)=x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, obținem că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	**2p**
c)	$x*(x+1)*(x+2)=\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)$, $x\in M$	**3p**
	$\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)=\log_2 54\Rightarrow 7\cdot 2^x-2=54\Rightarrow 2^x=8$, deci $x=3$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ crescătoare pe $[-1,1]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1)=\frac{\sqrt{6}}{2}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{6}}{2}$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt{2}\le f(x)+f(-x)\le\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=\int_1^3(2x+3-2\ln x+2\ln x)dx=\int_1^3(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_1^3=$	**3p**
	$=9+9-1-3=14$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(2x+3-f(x)\right)dx=2\int_1^e\ln x\,dx=2x\ln x\Big\|_1^e-2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=2e-2(e-1)=2$	**2p**
c)	$\int_0^1 x^2f\left(x^3+1\right)dx=\frac{1}{3}\int_1^2 f(t)\,dt=\frac{1}{3}\left(\int_1^2(2t+3)\,dt-2\int_1^2\ln t\,dt\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left(t^2+3t-2t\ln t+2t\right)\Big\|_1^2=\frac{1}{3}(4+6-4\ln 2+4-1-3-2)=\frac{4(2-\ln 2)}{3}$	**2p**